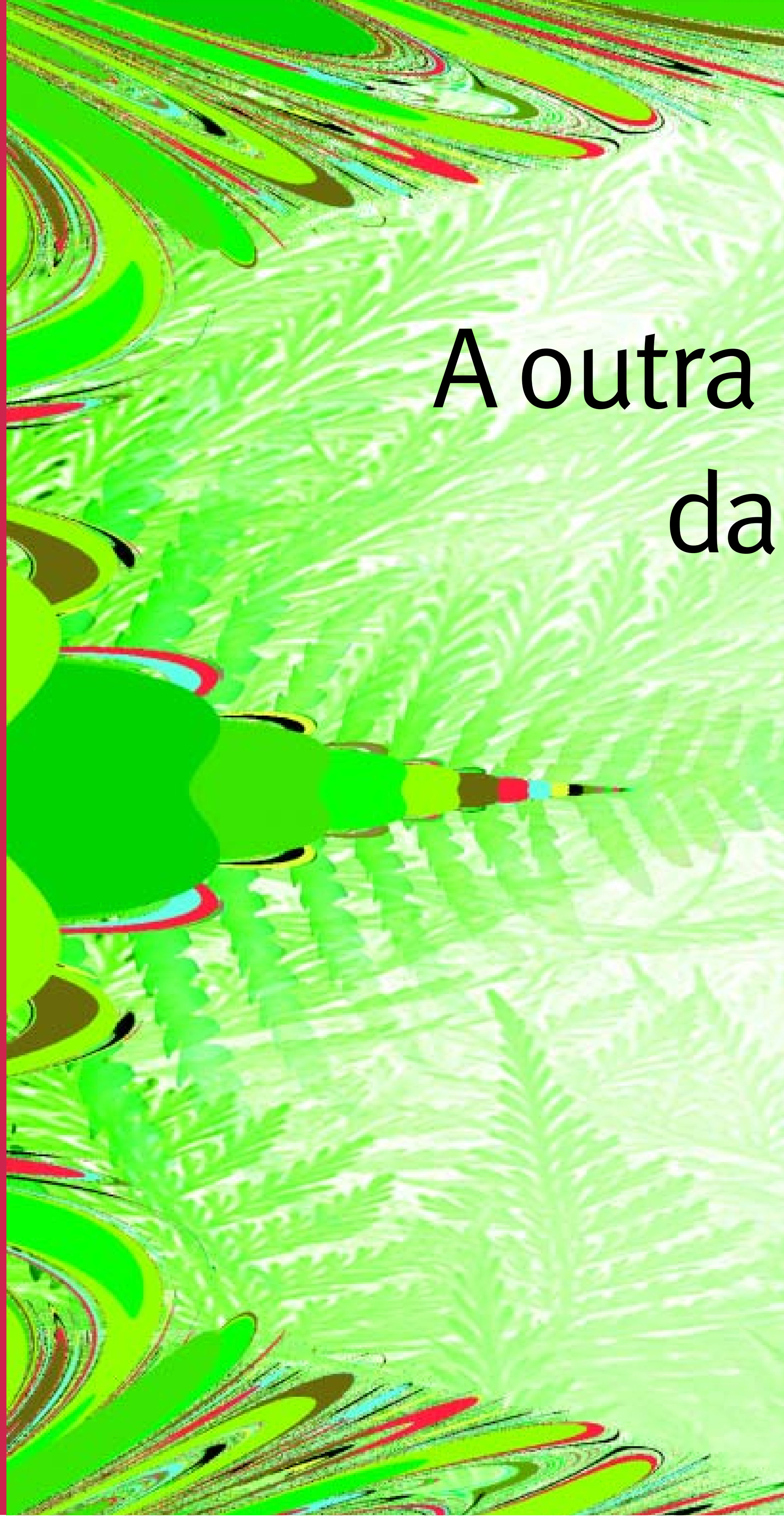
F Í S I C A

A outra da



Uma das mais interessantes propriedades dos objetos na natureza é que eles se apresentam de formas diferentes quando observados de maneiras distintas. Por exemplo, uma laranja pode parecer um ponto quando observada de muito longe, mas aproxima-se de uma esfera quando observada mais de perto. Sob uma lente, veremos os diversos poros na sua casca e sob um microscópio poderemos observar as células que a constituem. Assim, um mesmo objeto pode ser diferentemente descrito e compreendido quando observado em escalas espaciais distintas. Isso tem sido explorado pela ciência dentro de uma estratégia conhecida como 'dividir para conquistar', o que possibilita melhor analisar e compreender um fenômeno natural quando tratado dentro de certo intervalo de escala espacial.

Luciano da Fontoura Costa
e **Andrea Gomes Campos Bianchi**
*Grupo de Pesquisa
em Visão Cibernética,
Instituto de Física de São Carlos,
Universidade de São Paulo*

dimensão dimensão fractal

O conceito de escala espacial refere-se aos tamanhos nos quais estamos interessados em um certo momento ou lugar. Por exemplo, em nossas casas, no dia-a-dia, interagimos com objetos da ordem de alguns milímetros e centímetros (cereais, talheres, produtos de limpeza) até metros (móveis, cortinas, escadas). Fora de casa, a escala espacial estende-se para dezenas de metros (tamanho de casas e terrenos), centenas de metros (quarteirões e pontes) ou milhares de metros (distância entre bairros ou cidades). Assim, o intervalo de escalas espaciais em nosso cotidiano vai de milímetros até quilômetros.

Nas últimas décadas, avanços científicos e tecnológicos têm possibilitado estender continuamente esse intervalo, tanto para o mundo microscópico (investigado com a ajuda de microscópios e outros aparelhos) quanto o macroscópico, acessível através de binóculos, lunetas, telescópios, radiotelescópios, entre outros equipamentos.

Mas há relação entre esses dois mundos tão extremos? A resposta é sim, pois propriedades e fenômenos ocorrendo em uma dessas escalas poderão estar relacionados a efeitos em outras. Dois exemplos simples: a) o volume de um balão de gás, que é uma propriedade associada à escala na qual o balão apresenta sua forma característica, dependerá das propriedades microscópicas (entre elas, velocidade) de cada uma das partículas do gás dentro do balão; b) a mudança de cor em uma laranja (do verde para o alaranjado) é um processo visível a olho nu, mas ocorre no nível das células de sua casca.

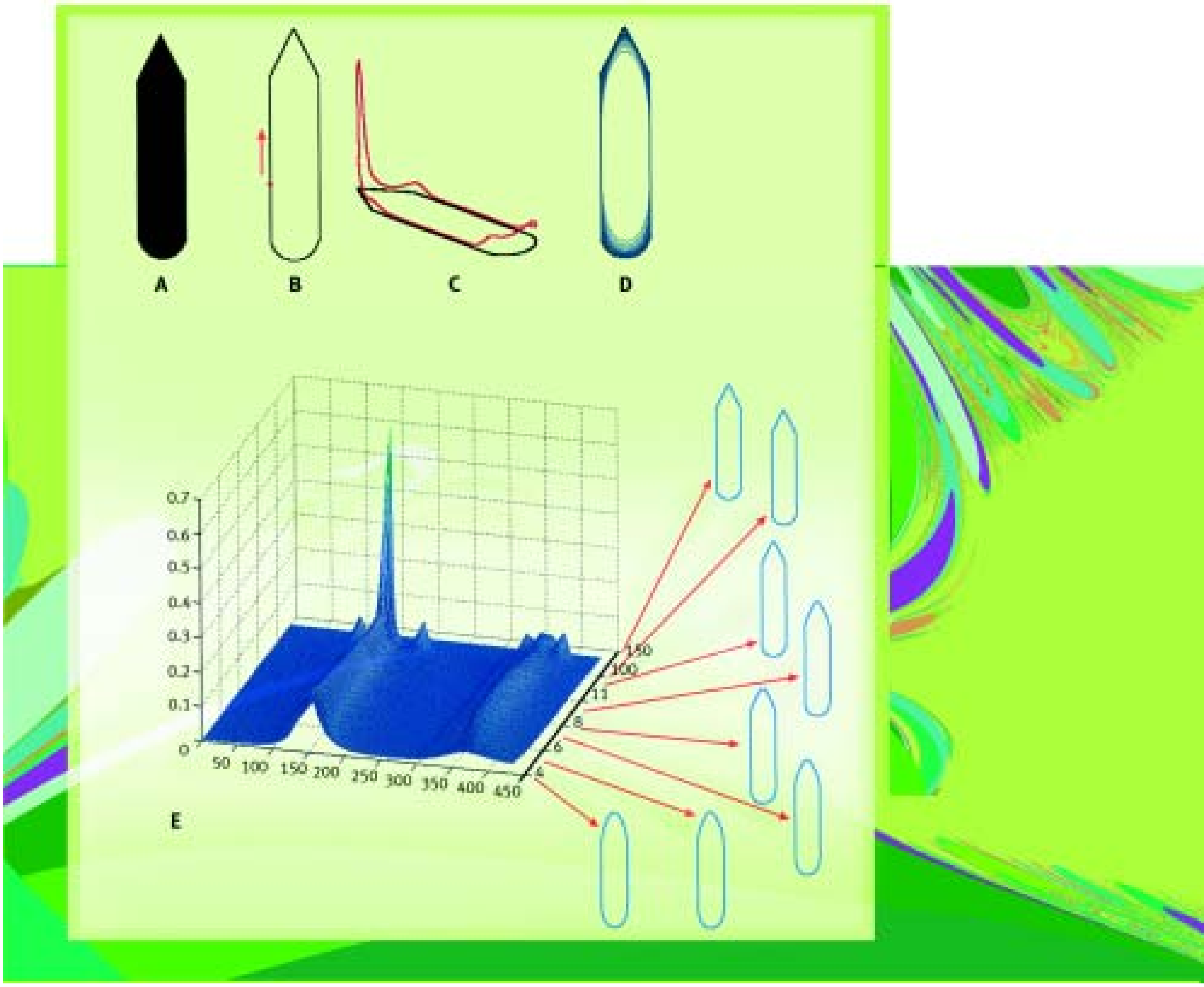
De fato, essa extensão de influências ao longo das escalas espaciais pode também oferecer valiosos subsídios para melhor entendermos e analisarmos um problema. Foi isso que motivou a criação do chamado método multiescala, que permite integrar o conhecimento adquirido ao longo das diversas escalas espaciais que sejam relevantes para o estudo de um determinado problema.

Um bom exemplo de métodos multiescala são aqueles aplicados à análise da forma de objetos bidimensionais. Um desses métodos se baseia na 'suavização' progressiva da curvatura de um objeto ao longo de seu contorno. O resultado final desse processo fornece uma visão do objeto original ao longo de escalas espaciais cada vez maiores e com menos detalhes (ver 'Curvogramas').

Caminhada **infinita**

A abordagem multiescala recebeu recentemente dois importantes incentivos: a sistematização de relações entre as escalas (permitida pelo estabelecimento da ciência dos fractais), bem como o progressivo aumento de poder computacional à disposição dos pesquisadores.

Vale aqui, então, uma breve definição do que sejam objetos fractais. Basicamente, eles se caracterizam pelo que denominamos 'auto-similaridade infinita', ou seja, suas aparências são semelhantes qualquer que seja a escala espacial em que são observados, seja ela microscópica ou macroscópica. Um exemplo é a chamada curva triádica de Koch – o nome é uma homenagem ao matemático suíço Helge Koch (1870-1924). Como toda curva fractal típica, ela é definida por um elemento básico gerador, que, repetido infinitamente, levará à curva (figura 2).



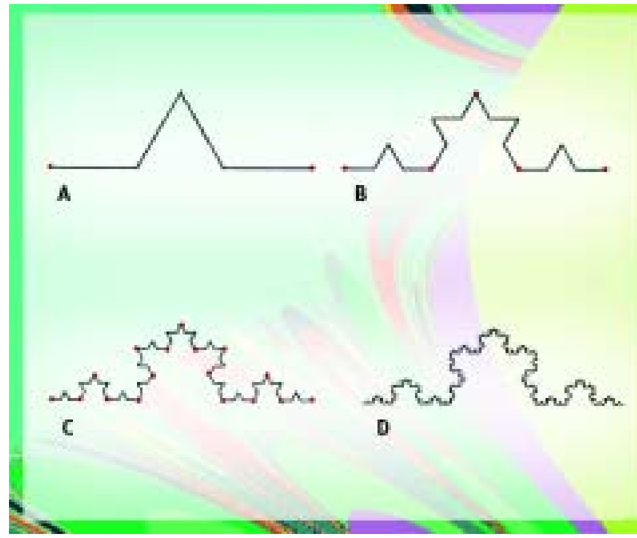


Figura 2. Curva de Koch em suas diferentes escalas. Ao substituirmos cada uma das arestas do objeto em (A) pelo próprio elemento gerador, obtemos (B). As duas próximas substituições nos levam às curvas em (C) e (D), e assim por diante. A curva triádica de Koch será obtida ao se repetir infinitamente esse processo para dentro e para fora da figura

Curvas fractais têm ainda outra propriedade peculiar: seu perímetro é infinito, isto é, se iniciarmos uma caminhada no início da curva nunca atingiremos sua outra extremidade.

A dimensão **fractal**

Desde longa data, os matemáticos e geômetras têm caracterizado elementos geométricos como o ponto, as curvas e as superfícies em termos de sua dimensão topológica. Com base nesse conceito, dizemos que ponto tem dimensão 0, a reta tem dimensão 1, o plano tem dimensão 2 e o espaço usual tem dimensão 3. No entanto, seria de certa forma 'injusto' atribuir a uma curva tão elaborada como a de Koch dimensão unitária, como a de uma reta comum.

Para resolver esse problema, adotou-se, então, o conceito de dimensão fractal, que pode assumir valores fracionários em vez de apenas números inteiros. Sem entrar em detalhes matemáticos, adiantamos ao leitor que a curva triádica, por exemplo, tem dimensão fractal (Fs) de aproximadamente 1,26. Curvas bidimensionais podem apresentar dimensão fractal entre 1 e 2, como mostra a figura 3.

Uma interpretação conceitual poderosa da dimensão fractal é como sendo uma medida de 'complexidade' do objeto em estudo. Na prática, podemos caracterizar a dimensão fractal como uma medida da superfície efetiva de contato entre o ▸

Curvogramas

Como exemplo do método de curvogramas, apresentamos um objeto (figura 1A) que é percorrido ao longo de seu contorno. Esse percurso inicia-se no ponto marcado em vermelho, movendo-se em sentido horário, conforme ilustrado na figura 1B. O valor absoluto da curvatura ao longo do contorno do objeto é mostrado na figura 1C. Naturalmente, as partes mais encurvadas do objeto implicam maior curvatura, sendo essa a razão de o valor absoluto da curvatura (linha vermelha na figura 1C) apresentar 'picos' ou 'elevações' onde é maior a curvatura do objeto em questão.

Essa abordagem pode ser ainda mais enriquecida através do borramento progressivo do contorno. Por borramento, entende-se a perda de pequenos detalhes do contorno – algo semelhante ao que ocorre quando embaçamos as lentes dos óculos. De fato, o processo de borramento pode ser imediatamente compreendido observando-se a figura 1D, que apresenta uma seqüência de versões progressivamente borradas (curvas azuis) do contorno.

Observe que esses borramentos progressivos representam uma visão do objeto original ao longo de escalas espaciais cada vez maiores e com menos detalhes, dando origem à natureza multiescala do problema. O curvograma é, então, definido pelos gráficos de curvatura obtidos para cada uma das versões borradas do contorno, conforme ilustrado na figura 1E.

Ao observarmos como os picos das 'montanhas' definidas ao longo do eixo em negrito evoluem à medida que aumentamos a escala espacial, verificamos que alguns dos picos diminuem de altura rapidamente, ao passo que outros permanecem altos ao longo de um maior intervalo de escalas. Essa dinâmica da evolução dos picos apresenta uma interessante indicação sobre a 'saliência' dos pontos respectivos no contorno.

Figura 1. Exemplo para a curvatura multiescala. Em (A), temos o objeto em estudo; em (B), o seu contorno; em (C), o valor absoluto de sua curvatura; em (D), o contorno com suas versões 'suavizadas' em azul. Em (E), está o curvograma e suas respectivas versões suavizadas

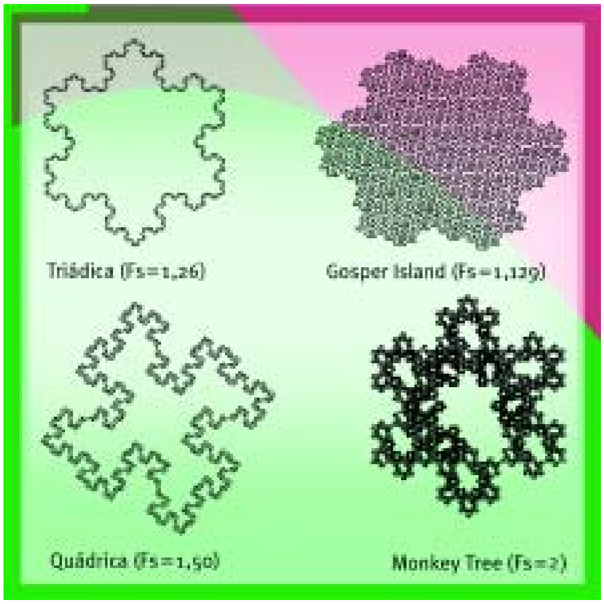


Figura 3. Exemplo de figuras fractais teóricas, com seus respectivos valores de dimensão fractal (Fs)

objeto e o seu meio. Portanto, quanto maior essa superfície (considerando-se uma célula unitária), maior será a dimensão fractal do objeto. A dimensão fractal pode ser usada para caracterizar a reatividade química de superfícies, bem como as trocas entre os órgãos do corpo humano e o meio – os brônquios, por exemplo, têm estrutura bem complexa, o que ajuda a maximizar a troca de gases com o ar.

Embora possamos determinar teoricamente a dimensão de diversas curvas fractais matemáticas, precisamos usar métodos numérico-computacionais para estimar a dimensão fractal de objetos encontrados na natureza. Um dos mais tradicionais métodos usados para essa finalidade baseia-se no fracionamento do objeto em pequenos quadrados (ver 'Contagem de caixas').

Curva de **fractalidade**

O maior problema com o uso da dimensão fractal para caracterizar formas da natureza é que estas não são perfeitamente fractais (ou auto-similares). De fato, qualquer objeto tem tamanho finito, implican-

Contagem de caixas

O método tradicionalmente conhecido como 'contagem de caixas', que define uma dimensão fractal de mesmo nome, envolve a sobreposição no objeto, representado pela curva em vermelho, de grades com células (ou 'caixas') de tamanhos diferentes (figura 4A, 4B, 4C e 4D).

Para cada uma dessas grades, contamos quantas células contém ao menos uma diminuta parte do objeto e, a partir disso, construímos um gráfico do número de células contendo partes do objeto em função do tamanho das células (figura 4E) – para o leitor mais versado em matemática, adiantamos que esse gráfico é feito com base na função denominada logaritmo. O valor absoluto da inclinação da reta assim definida nos dá uma estimativa da dimensão fractal do objeto investigado.

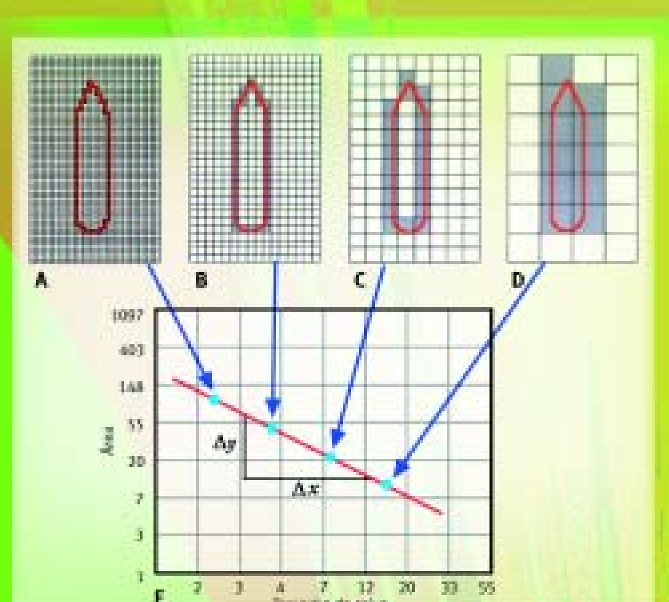


Figura 4. Ilustração do método tradicional de cálculo de dimensão fractal denominado 'contagem de caixas'. A contagem dos elementos que pertencem às grades – itens de (A) até (D) – para cada tamanho de caixa gera o gráfico em (E). Neste, o valor da dimensão fractal do objeto (Fs) é obtido pela divisão dos lados ($\Delta y/\Delta x$) do triângulo formado

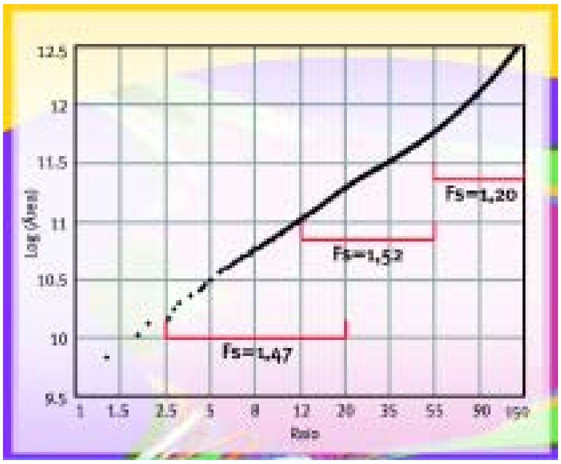


Figura 5. Variação do valor da dimensão fractal ao longo da curva segundo o intervalo adotado

do que sua dimensão fractal tenda para zero à medida que o observamos em escalas cada vez maiores. Em formas naturais, raramente encontramos mais que duas ou três hierarquias de repetição dos padrões geradores. A samambaia típica, por exemplo, tem só três ou quatro hierarquias, sendo que a estrutura da folha altera-se radicalmente depois da mais microscópica dessas hierarquias. Algo semelhante ocorre com as imagens digitais, que têm resolução espacial necessariamente limitada. Isso impõe restrições adicionais à extensão do comportamento fractal (ou seja, a 'fractalidade') dos objetos naturais representados nessas imagens.

Assim, o máximo que podemos esperar é que essas formas apresentem dimensão fractal elevada ao longo de um intervalo limitado de escalas espaciais. Isso sugere que, para cada escala espacial empregada, surja um valor específico para a dimensão fractal. A curva da figura 5 mostra um exemplo da variação dos valores de dimensão fractal (Fs) para alguns intervalos da curva.

Três **parâmetros**

Consideremos uma forma simples cuja dimensão fractal multiescala desejamos calcular (figura 6A). Em vez de sobrepormos grades de tamanhos diferentes – como no método da contagem de caixas –, realizamos dilatações do objeto com discos de raios crescentes (em vermelho na figura). Essa dilatação pode ser compreendida como se deslizássemos o disco por toda a superfície do objeto, marcando todos os pontos sobre os quais o disco passou (figura 6B e 6C), gerando uma curva (semelhante à da figura 5), da área da figura em função do raio dilatado. Agora, em vez de considerarmos apenas alguns intervalos da curva, como feito na figura 5, ou de traçarmos uma reta (método da 'contagem de caixas') para descobrirmos o valor da dimensão fractal, consideramos a derivada da curva. Esse método, proposto pelo primeiro autor deste trabalho, representa a continuação de uma abordagem anterior na qual a curva era quebrada em três escalas espaciais (Costa e César, 2001), tendo sido desenvolvido como parte do mestrado de Sílvia C. D. Pinto.

Intuitivamente, a derivada significa fazer o intervalo o menor possível e calcular a sua inclinação, de modo que seja calculada em 'um ponto' da curva. Assim, temos a variação da dimensão fractal em função das várias escalas nas quais observamos esse objeto – nesse caso, essas escalas são representadas pela variação do raio do disco, e essa curva é denominada 'dimensão fractal multiescala'.

Vemos, na figura 7, que o comportamento fractal (ou, simplesmente, fractalidade) do objeto diminui em ambas as extremidades, ou seja, tanto para

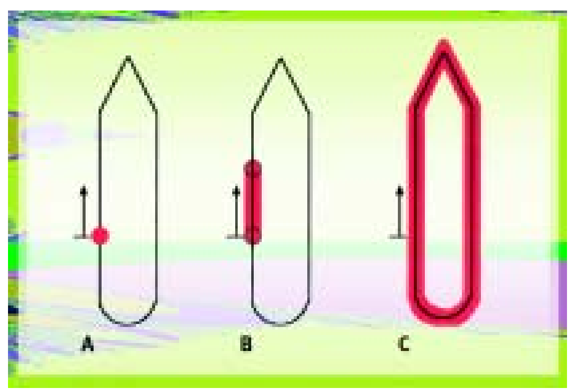


Figura 6. Exemplo da dilatação do contorno de um objeto

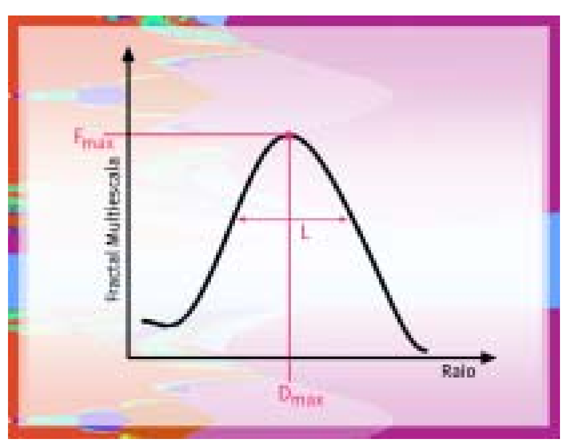


Figura 7. Ilustração de medidas extraídas do gráfico com a curva de dimensão fractal multiescala: pico de fractalidade (F_{max}), escala de máxima fractalidade (D_{max}) e largura de alta fractalidade (L)

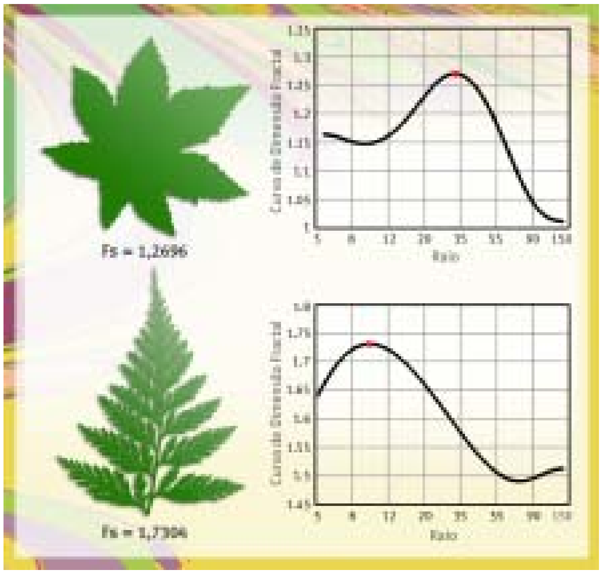


Figura 8. Gráficos de dimensões fractais multiescala para imagens de duas formas de folha. Os pontos vermelhos nos gráficos (curvas de dimensão fractal multiescala) representam o pico de fractalidade (F_{max}) para cada uma das formas

valores muito pequenos quanto muito grandes do raio do disco. No entanto, há um pico de comportamento fractal na região intermediária, que corresponde a valores também intermediários dos raios do disco. Outros comportamentos podem também ser observados, incluindo oscilações da fractalidade.

Além de nos dar uma abrangente caracterização da complexidade de acordo com as diversas escalas espaciais nas quais estudamos um certo objeto (ou forma), as curvas de dimensão fractal multiescala também podem nos ajudar a analisar outras propriedades da forma em estudo. Vejamos:

Exemplos de aplicação

O grande potencial da dimensão fractal para caracterizar objetos e fenômenos naturais pode ser ilustrado através de dois exemplos derivados de projetos em andamento no Grupo de Pesquisa em Visão Cibernética do Instituto de Física de São Carlos (IFSC), da Universidade de São Paulo (USP).

O primeiro exemplo refere-se à caracterização da complexidade de neurônios. Como essas células têm forma tipicamente elaborada e ramificada, é natural que a caracterização da complexidade de sua morfologia – o que pode ser necessário para fins de diagnóstico – possa ser efetivamente realizada utilizando-se a dimensão fractal multiescala (figura 9). Essa aplicação tem sido realizada em colaboração com as pesquisadoras Marinilce dos Santos e Dânia Hamassaki Britto, do Instituto de Ciências Biomédicas da USP.

O segundo exemplo relaciona-se à caracterização da complexidade da forma de pequenas partículas de aerossóis (solução na qual partículas sólidas ou líquidas estão dispersas em um gás). A complexidade de uma partícula de um aerossol determina suas características aerodinâmicas. Um aerossol constituído por partículas mais lisas apresentará menor viscosidade para escoamento dentro de tubulações. Já um aerossol composto por partículas mais rugosas apresentará fluxo mais errático, permitindo maior possibilidade de choque com as paredes nas quais é injetado.

Por exemplo, é interessante que um aerossol usado para transporte de medicamentos via inalação apresente fluxo bastante irregular, aumentando assim a sua efetividade da assimilação, através de choques, pelas paredes dos al-

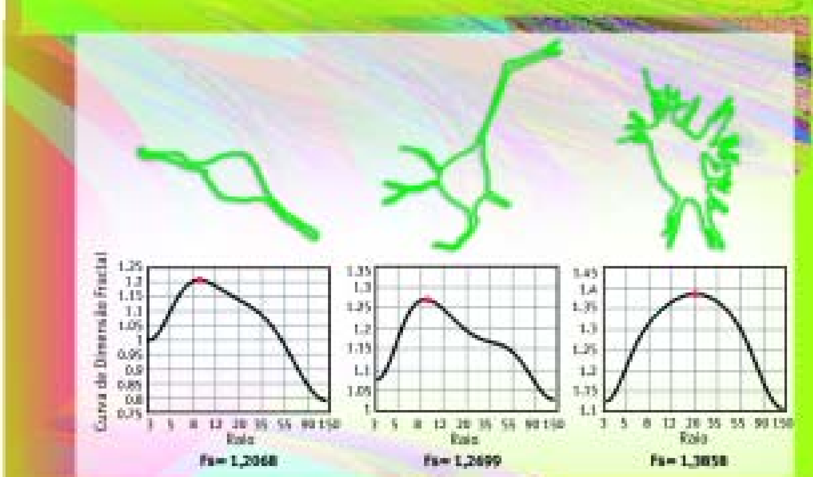


Figura 9. Exemplo de complexidade para diferentes formas de células neurais. Nas curvas de dimensão fractal multiescala, não apenas os picos de fractalidade (pontos vermelhos) indicam uma complexidade crescente, mas também a maior largura da terceira curva demonstra que a complexidade da respectiva célula se estende por um maior intervalo de escalas espaciais

Pico de fractalidade (F_{max}): indica a máxima complexidade atingida pela forma. Basicamente, um valor elevado dessa medida nos indica que o objeto estudado tem maior interface com o espaço ao seu redor. Um exemplo: na figura 8, os picos de fractalidade das duas imagens de folhas nos fornecem uma clara indicação das complexidades relativas de cada uma delas, sendo a segunda a mais complexa.

Escala de máxima fractalidade (D_{max}): indica a escala espacial na qual a curva de dimensão fractal multiescala atinge o seu máximo valor. Basicamente, se duas formas apresentam o mesmo valor de pico de fractalidade, mas uma delas possui D_{max} menor, então esta forma caracteriza-se por ter complexidade em menor escala. Na figura 8, observamos que a escala de máxima fractalidade da segunda folha é nitidamente menor que a da primeira, indicando que a segunda forma apresenta maior complexidade, envolvendo detalhes de tamanhos menores.

Largura de alta fractalidade (L): corresponde à largura da curva quando cortada a uma certa altura (por exemplo, na metade ou em um valor fixo preestabelecido). Valores elevados de L indicam que a forma sob análise apresenta complexidade alta ao longo de diversas escalas espaciais, ou seja, muitas hierarquias. Na figura 8, o maior valor de L é verificado para a segunda folha, indicando que ela apresenta comportamento fractal mais destacado ao longo de um maior intervalo de detalhes.

Quando considerados de forma combinada, esses três parâmetros permitem uma descrição da complexidade da forma muito mais completa do que a tradicionalmente obtida simplesmente através da curva de dimensão fractal multiescala.

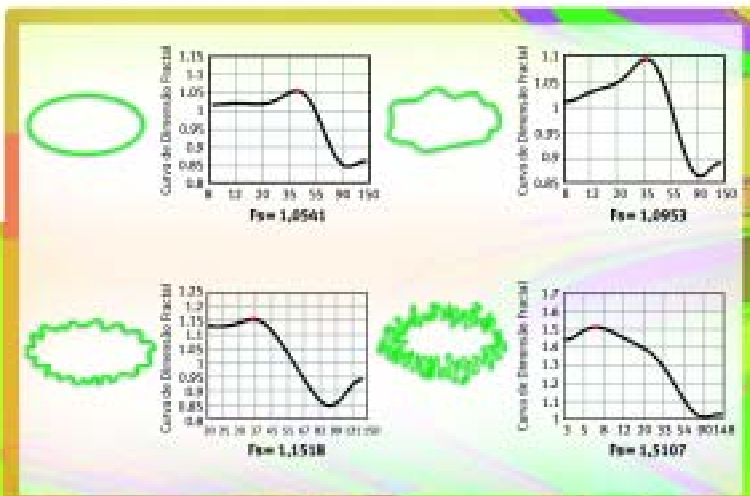


Figura 10. Exemplo da complexidade de partículas. As diversas partículas e suas respectivas curvas da dimensão fractal multiescala demonstram clara e precisamente a rugosidade das partículas em termos do valor máximo da curva (F_{max}), no sentido de que partículas mais complexas apresentam maiores valores dessa medida

véolos pulmonares. Assim, fica clara a importância de caracterizarmos de modo objetivo e efetivo a rugosidade dessas partículas, o que pode naturalmente ser feito utilizando-se a dimensão fractal (figura 10). Essa abordagem é utilizada por nosso colaborador Brian Kaye, da Universidade Laurentian (Canadá).

Há também a possibilidade – correntemente sendo explorada pelo Grupo de Pesquisa em Visão Cibernética – de estender a dimensão fractal multiescala para três ou mais dimensões, o que deverá ser aplicado na caracterização da densidade e da complexidade de padrões de expressão de proteínas no desenvolvimento de embriões. Esse projeto é conduzido em colaboração com o Departamento de Anatomia da Universidade de Viena (Áustria).

Simples e **poderosos**

A aplicação do conceito de dimensão fractal multiescala em problemas reais se estende hoje por um vasto campo interdisciplinar, indo, por exemplo, do estudo da complexidade encontrada em células nervosas até o estudo de partículas de aerossóis (ver 'Exemplos de aplicação').

Enquanto muitas das abordagens correntes para caracterização fractal de objetos naturais consideram apenas um valor de dimensão fractal, o uso da dimensão fractal multiescala representa a 'outra dimensão', que dá título a este artigo. Sendo relativamente simples e poderoso, esse conceito apresenta grande potencial para investigações nas mais variadas áreas, desde biologia até engenharia. ■

Sugestões para leitura

COSTA, L. da F., CAMPOS, A. G. e MANOEL, E. T., 'An Integrated Approach to Shape Analysis: Results and Perspectives', *International Conference on Quality Control by Artificial Vision*, Le Cresout, France, 2001.

COSTA, L. da F. e CESAR JR., R. M., *Shape Analysis and Classification: Theory and Practice*, CRC Press, Florida, 2000.

PINTO, S. C. D. *Estimação da dimensão fractal de imagens de SPM.* Tese de Mestrado (orientador L. da F. Costa), IFSC, Universidade de São Paulo.

Na Internet

http://cyvision.if.sc.usp.br/fractal/index.htm

Além da descrição dos conceitos apresentados neste artigo, traz animações e um programa executável para plataforma Windows com o qual é possível estimar curvas de dimensão fractal multiescala de objetos bidimensionais.